සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
முழுப் பதிப்புரிமையுடையது]
All Rights Reserved]

13722

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව / இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் / Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 1998 අගෝස්තු (නව නිර්දේශය)
கல்விப் பொதுத் தராதரப்பத்திர(உயர் தர)ப் பரீட்சை, 1998 ஆகஸ்ற் (புதிய பாடத்திட்டம்)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1998 **(New Syllabus)**

ශුද්ධ ගණිතය II
தூய கணிதம் II
Pure Mathematics II

05 | S | II

පැය තුනයි / மூன்று மணித்தியாலம் / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. ගණය 3 වූ **A** සහ **B** සමචතුරශ්‍ර න්‍යාස සඳහා $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ බව සාධනය කරන්න.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ සහ } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ලෙස ගනිමු.}$$

$\mathbf{CD} = \mathbf{DC} = \mathbf{I}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න; මෙහි **I** යනු 3 වන ගණයේ ඒකක න්‍යාසය වේ.

$$\begin{aligned} 6x - 3y - 2z &= 3 \\ -3x + 2y + z &= 2 \\ -2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය $\mathbf{AX} = \mathbf{H}$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ සහ $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ වන අතර **A** නිර්ණය කළ යුතුවේ.

$\mathbf{CC}^T = \mathbf{A}$ වන පරිදි a, b, c සොයා $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ වන පරිදි **B** න්‍යාසයක් ලබාගන්න. එ නයින් දී තිබෙන ඒකජ සමීකරණ පද්ධතිය විසඳන්න.

2. (අ) a සහ b ප්‍රභින්න නියත වූ

$$\begin{vmatrix} a^2 & 1-a^2 & 1+a^3 \\ b^2 & 1-b^2 & 1+b^3 \\ x^2 & 1-x^2 & 1+x^3 \end{vmatrix} = 0$$

සමීකරණය විසඳන්න.

$a = -b$ වන විට සමීකරණයේ මාත්‍රය කුමක් ද?

(ආ) (i) xy - තලය එයටම අනුරූපණය කරන $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ඒකජ පරිණාමනය $ad \neq bc$ නම් තලයේ පිහිටි එක් එක් සරල රේඛාව, සරල රේඛාවකට අනුරූපණය කරන බව සාධනය කරන්න.

(ii) l යනුවෙන් xy - තලයේ පිහිටියා වූ ද, මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නා වූ ද, x - අක්ෂයට α කෝණයකින් ආනත වන රේඛාවක් ගනිමු.

xy - තලය එයට ම අනුරූපණය කරන $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ඒකජ පරිණාමනය තලයේ පිහිටි එක් එක් ලක්ෂ්‍යය, l මත එම ලක්ෂ්‍යයේ පරාවර්තනයට අනුරූපණය කරන බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. z_1 සහ z_2 යනුවෙන් සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ගනිමු.

(i) $Re(z_1\bar{z}_2) = Re(\bar{z}_1 z_2)$

(ii) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\ Re(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $|1 - z_1\bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)$

බව පෙන්වන්න.

$|z_2| < 1$ සහ $z_1\bar{z}_2 \neq 1$ ලෙස ගනිමු.

1 ට වඩා $|z_1|$ අඩුවීම හෝ වැඩිවීම හෝ අනුව 1 ට වඩා $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|$ අඩු හෝ වැඩි හෝ වන බව පෙන්වන්න.

α යනු $2z^5 - iz^4 - iz - 2 = 0$ සමීකරණයේ මූලයක් නම් $|\alpha| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

[ඉඟිය : දී තිබෙන සමීකරණය $\dfrac{1}{z^4} = \dfrac{z - \frac{i}{2}}{1 + \frac{iz}{2}}$ ලෙස ලියන්න.]

4. (අ) ආගන්ඩ් සටහනේ P_1, P_2 ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් z_1, z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. ආගන්ඩ් සටහනෙහි, $z_1 + z_2$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යය ලබාගැනීම සඳහා ජ්‍යාමිතික නිර්මාණයක් දෙන්න.

(i) $|z_1 - z_2| = P_1P_2$

(ii) $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ ද, z_1 සහ z_2 නිශ්ශූන්‍ය ද නම් $\left|Arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\right| = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\left|Arg\left(\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)\right| = \dfrac{\pi}{2}$ නම් $|z_1| = |z_2|$

බව පෙන්වන්න.

(ආ) ආගන්ඩ් සටහනෙහි A, B, P ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙළින් a, b, z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. A සහ B යනු අචල ලක්ෂ්‍යයන් ද, P යනු $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = k$ (නිශ්ශූන්‍ය නියතයක්) වන පරිදි වූ විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ද නම් $k = 1$ සහ $k \neq 1$ අවස්ථා දෙක වෙන වෙනම සලකමින් P හි පථය සොයන්න.

5. (අ) $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ යනුවෙන් ඕනෑම දෛශික තුනක් ගනිමු. $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ අදිශ ත්‍රිත්ව ගුණිතය $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ මගින් දක්වමු.

$[\mathbf{x} + \mathbf{y},\ \mathbf{y} + \mathbf{z},\ \mathbf{z} + \mathbf{x}] = 2\,[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ බව සාධනය කරන්න.

(ආ) O මූල ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් A, B, C, D ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\lambda\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ වේ; මෙහි λ පරාමිතියකි.

A, B, D ඒකරේඛීය වීම පිණිස λ ගතයුතු අගය නිර්ණය කරන්න. A, B, D ලක්ෂ්‍ය ඒකරේඛීය නොවන විට A, B, C, D ලක්ෂ්‍ය ඒකතල නොවන බව පෙන්වන්න.

6. (අ) O මූල ලක්ෂයක් අනුබද්ධයෙන් P, Q, R ලක්ෂ තුනෙහි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ වේ.

   (i) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ආකාරයෙන් PQ රේඛාවේ දෛශික සමීකරණය සොයන්න.

   (ii) PQ මත R පිහිටන බව පෙන්වන්න.

   (iii) PQ සහ දෛශික සමීකරණය $\mathbf{r} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k} + \lambda(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$ වන l රේඛාව, ලක්ෂයක දී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න. මෙම ලක්ෂයේ පිහිටුම් දෛශිකය ද, PQ සහ l අඩංගු තලයට අභිලම්බ වූ ඒකක දෛශිකයක් ද සොයන්න.

   (ආ) $OABC$ යනු සවිධි චතුස්තලයක් වේ. දෛශික ක්‍රම භාවිතයෙන් BOC සහ AOC කෝණ වල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක අතර කෝණය නිර්ණය කරන්න; මෙහි අදාළ සමච්ඡේදක BOC සහ AOC මුහුණත් මත පවතින බවට ගෙන ඇත.

7. $f(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos 2x$ ලෙස ගනිමු. $f(x) = \frac{5}{2}\sin(2x + \alpha)$ වන පරිදි $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ පරාසය තුළ α අගයක් පවතින බව පෙන්වන්න.

   (i) $f(x) = 0$ වීමට

   (ii) $f(x)$ ට උපරිමයක් පැවැතීමට

   (iii) $f(x)$ ට අවමයක් පැවතීමට

   x ගත යුතු අගයයන් සොයන්න.

   f හි සහ $g(x) = f(x - \alpha)$ මගින් අර්ථ දක්වෙන g හි ප්‍රස්තාර එකම රූප සටහනේ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා කටු සටහන් කරන්න.

   ඒ නයින් $h(x) = \frac{3}{2}\sin 2x + 2|\cos 2x|$ මගින් අර්ථ දක්වෙන h හි ප්‍රස්තාරය $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ සඳහා කටු සටහන් කරන්න.

8. (අ) සුපුරුදු අංකනයෙන් ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "සයින නීතිය" ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න. එම අංකනයෙන් ම

$$\text{(i)}\ \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} \qquad \text{(ii)}\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$$

   බව සාධනය කරන්න.

   ත්‍රිකෝණයක් සඳහා "කොසයින නීතිය" අපෝහනය කරන්න.

   (ආ) $2\tan^{-1}(\sin x) = \tan^{-1}(2\sec x)$ විසඳන්න.

9. (a, b) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නාවූ ද, x - අක්ෂය සමග θ කෝණයකින් ආනතවූ ද සරල රේඛාව, පරාමිතිකව $x = a + t\cos\theta,\ y = b + t\sin\theta$ මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ O ශීර්ෂය, මූලලක්ෂ්‍ය මත ද, A ශීර්ෂය, පළමුවන පාදකයේ ද, පිහිටන අතර $OB = 2OA$ ද, OA හි සහ OB හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x - 2y = 0$ සහ $2x + y = 0$ ද වේ. $(5, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා AB යන්නේ නම් AB සඳහා නිවේශන දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වන්න. එම එක් එක් නිවේශනය සඳහා A හි සහ B හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

තිබිය හැකි OAB ත්‍රිකෝණ දෙකේ වර්ගඵලවල අනුපාතය සොයන්න.

10. $A = (1, 2)$ සහ $B = (3, 2)$ ලෙස ගනිමු. $P = (x, y)$ යනුවෙන් APB කෝණය නියතයක් වන පරිදි විචල්‍ය ලක්ෂ්‍යයක් ගනිමු.

(i) $\angle APB = 90^\circ$ නම් P ලක්ෂ්‍යය $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

(ii) $\angle APB = 135^\circ$ නම් P ලක්ෂ්‍යය එක්කෝ $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ වෘත්තය මත නැත්නම් $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න. P හි පථය කුමක් ද? මෙම වෘත්ත දෙක සෘජුකෝණී ව ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

11. (අ) $t > 0$ වූ $x = t - \dfrac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$ සහ $y = \dfrac{2e^t}{e^{2t} + 1}$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලබයි.

පරාමිතිය t වූ P ලක්ෂ්‍යයේ දී C ට ඇඳි ස්පර්ශකයේ බෑවුම $\dfrac{-2e^t}{e^{2t} - 1}$ බව පෙන්වන්න.

P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය Q හිදී x- අක්ෂය ඡේදනය කරන්නේ යැයි ගනිමු. PQ දිග t කෙරෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න.

(ආ) a සහ b තාත්ත්වික සංඛ්‍යා නම් $r = a\cos\theta + b\sin\theta$ ධ්‍රැවක සමීකරණය වෘත්තයක් නිරූපණය කරන බව පෙන්වා එහි කේන්ද්‍රය සහ අරය සොයන්න.

$r = 4\cos\theta$ සහ $r = 2\sin\theta$ වෘත්ත දෙකට ඇඳිය හැකි පොදු ස්පර්ශක වල ධ්‍රැවක සමීකරණ සොයන්න.

12. $S \equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ඉලිප්සය, $y = mx + c$ රේඛාව ස්පර්ශ කිරීම සඳහා පැවතිය යුතු අවශ්‍යතාවය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\alpha \neq \pm a$ සහ $\beta \neq \pm b$ වූ $P = (\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන රේඛාවක්, $S = 0$ ස්පර්ශ කිරීම සඳහා පැවතිය යුතු අවශ්‍යතාවය ලබාගන්න.

P ලක්ෂ්‍යයේ සිට $S = 0$ ඉලිප්සයට ඇඳි ස්පර්ශක, x-අක්ෂය L සහ M හිදී කපයි. LM හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය $(b, 0)$ නම් P හි පථය පරාවලයක් මත පිහිටන බව පෙන්වන්න. පරාවලයේ නියාමකයේ සමීකරණය ද, නාභියේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.